

# **Análisis de puentes de planta circular por el método de la lámina plegada**

José I. González Esteban  
Avelino Samartín Quiroga  
Dres. Ingenieros de Caminos C. y Puertos

## **RESUMEN**

El comportamiento de los puentes de planta circular y sección transversal muy aligerada, presenta un problema complejo en cuanto a la distribución de esfuerzos, (interacción, flexión-torsión, distorsión, reparto de esfuerzos entre las distintas almas, etc.). Para poder realizar un correcto estudio del mismo es necesario disponer de un método de cálculo que analice globalmente el comportamiento de la estructura. El método de la Lámina Plegada constituye una herramienta de trabajo eficaz y de fácil utilización, válida para estructuras de sección transversal constante.

En este artículo se presenta una ampliación del método de la Lámina Plegada a este tipo estructural, así como un estudio paramétrico del comportamiento de un puente de sección cajón monocelular.

## **1. INTRODUCCION**

En la situación actual de la técnica de proyecto de carreteras, el puente ha dejado de ser un elemento singular para integrarse en el trazado de la misma, lo que tiene como consecuencia la aparición de puentes de geometría irregular.

El tipo de puente de más frecuente utilización después del recto, es el de planta circular. Como consecuencia de la curvatura en planta, su estudio es bastante más complejo que el del recto, por lo que es necesario acudir, en general, a la utilización de métodos numéricos.

Los puentes de curvatura en planta variable, pueden ser más adecuadamente asimilados a un puente con planta circular con curvatura de valor medio, que a uno recto; razón que añade interés al estudio de este tipo de puentes.

### 1.1. Análisis de puentes curvos como Láminas Plegadas

Cuando la luz del puente supera los 30 metros, la sección transversal del tablero que mejor se adapta a las necesidades del puente curvo es la sección cajón, que presenta características idóneas, tanto para el trabajo de flexión como para el de torsión, al mismo tiempo que proporciona una buena economía de material.

En esta sección las hipótesis de la resistencia de materiales de deformación plana o de indeformabilidad de la sección transversal no son válidas. En efecto, la distorsión de la sección adquiere importancia debido a la deformación por cortante. Aunque es posible considerar los efectos de estos fenómenos mediante análisis aproximados, la complejidad del cálculo aconseja la introducción de un modelo estructural global que permita estudiar de forma directa el funcionamiento de este tipo de tableros; un eficaz método de análisis de este tipo estructural en el caso de sección transversal constante es el de la lámina plegada.

Se denomina lámina plegada a una estructura formada por elementos planos unidos entre sí, y cuya superficie media es desarrollable, estando apoyada sobre varias líneas de apoyo. En el caso de que sólo existan nudos en los apoyos extremos, la lámina plegada se denomina canónica (Fig. 1.1).

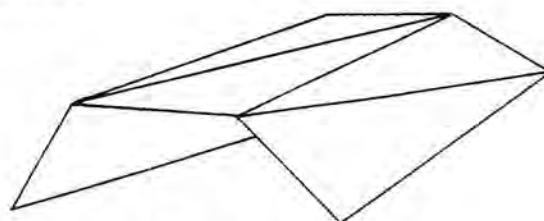


Fig. 1.1. Lámina Plegada canónica.

Aunque en el caso de tableros de puentes curvos no se puede hablar de láminas plegadas, al no ser planos los elementos que componen la estructura, por ser estas superficies de pequeña curvatura, se puede generalizar el método, realizándose su estudio de forma análoga al de las láminas plegadas rectas. (Fig. 1.2).

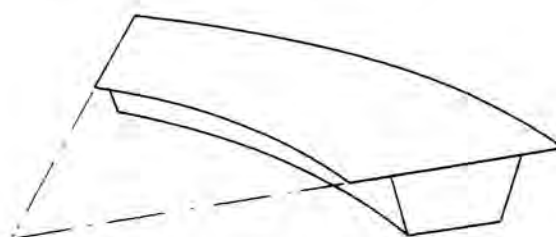


Fig. 1.2. Lámina Plegada curva.

Mediante este modelo es posible analizar en detalle los distintos esfuerzos que aparecen en este tipo de tableros. Los métodos de cálculo utilizados en la actualidad para el estudio de las láminas plegadas son: elementos finitos, bandas finitas y cálculo directo de la lámina plegada.

#### A) Elementos Finitos

El método de los Elementos Finitos es un método general de cálculo que permite resolver gran variedad de problemas físicos y mecánicos.

Consiste en la descomposición de la estructura en un conjunto de elementos bi o tridimensionales, en cuyo dominio se supone que las deformaciones adoptan una forma predeterminada en función de los desplazamientos de un número limitado de puntos característicos de dicho elemento, llamados puntos nodales (Fig. 1.3).

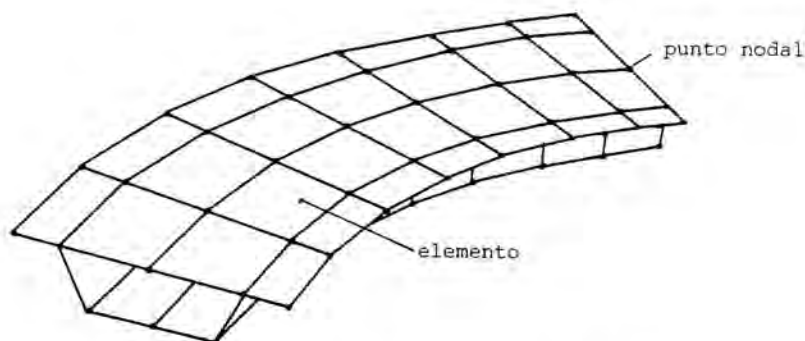


Fig. 1.3 Descomposición de una estructura en elementos finitos.

A partir de estas funciones de deformación, denominadas funciones de forma, y por medio de la teoría de la elasticidad, se obtienen valores de los esfuerzos y deformaciones en el elemento en función de los desplazamientos de los puntos nodales, y es posible formar, mediante métodos energéticos, una matriz de rigidez aproximada del elemento.

Este método de cálculo presenta la ventaja de poderse aplicar a tipos muy generales de estructuras con condiciones de apoyo arbitrarias. Presenta, sin embargo, algunos inconvenientes que limitan su utilización. Los principales son:

- Entrada de datos voluminosa y de tediosa elaboración.
- Necesidad de un gran volumen de cálculo y de almacenamiento en memoria, en comparación con otros métodos.
- Salida de resultados que requiere una elaboración posterior.

## B) Bandas Finitas

El método de las Bandas Finitas es un método derivado de el de los Elementos Finitos, y se emplea para el estudio de estructuras prismáticas apoyadas en dos bordes extremos, en especial para láminas plegadas.

Fue desarrollado por Cheung en 1968 (1) y aplicado a láminas plegadas de planta circular por Meyer (8) en 1970, siendo ampliado por Kabir a estructuras de varios vanos con apoyos intermedios flexibles, en 1974 (5).

El elemento básico de este método es una banda de ancho reducido que, en dirección longitudinal de la estructura, se extiende en toda la longitud de la misma. Las funciones de desplazamiento correspondientes a la dirección transversal son análogas a las desarrolladas para elementos finitos de tipo lámina y las funciones correspondientes a la dirección longitudinal se sustituyen por un desarrollo en serie de Fourier, realizándose un análisis de la estructura independiente para cada armónico.

La ventaja del método de las bandas finitas frente al de los elementos finitos para este tipo estructural se debe a la menor memoria de cálculo necesaria, así como al menor número de datos requeridos, obteniéndose los resultados en forma más fácilmente utilizable de forma directa.

Este método presenta, por otra parte, las limitaciones correspondientes a los análisis armónicos.

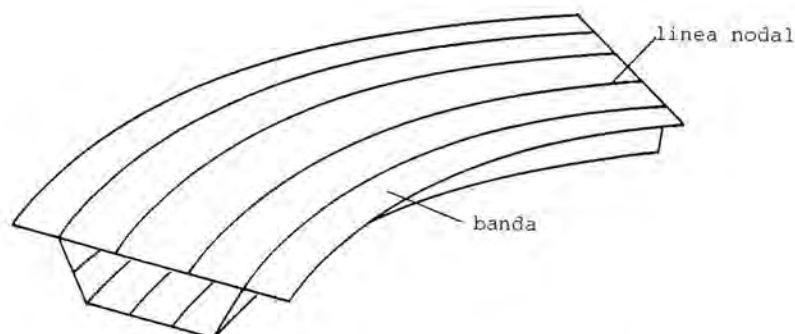


Fig. 1.4. Descomposición de una estructura en bandas finitas.

### C) Cálculo directo de la lámina plegada

El cálculo directo o exacto de la lámina plegada consiste en analizar cada una de las superficies que forman la estructura, por medio de la teoría de la elasticidad, y resolver la estructura de acuerdo con los métodos de cálculo matricial. No se realizan más simplificaciones que las generales de linealidad del análisis estructural.

Los métodos comunes de cálculo de láminas plegadas, se limitan al estudio de láminas plegadas rectas de sección constante; ésto es, los planos que contienen a los soportes son paralelos y normales a las aristas de la lámina, las secciones paralelas a éstos son iguales entre sí y las aristas longitudinales de la estructura son rectas; aunque existen algunos métodos específicos para el cálculo de láminas plegadas rectas no prismáticas.

El cálculo directo de la lámina plegada presenta, frente al de las bandas finitas, la ventaja de una mayor exactitud y de una menor necesidad de almacenamiento y tiempo de cálculo, ya que al obtenerse para cada lámina su solución exacta, el número de elementos en que hay que dividir la estructura para el cálculo está determinado únicamente por los quiebros, uniones de elementos, o cambios de espesor en la sección transversal, no necesi-tándose dividir cada lámina que compone la estructura en elementos menores por razones de limitar la dimensión transversal de cada elemento o por existir cargas aplicadas en la lámina, como ocurre con las Bandas Finitas. Presenta, sin embargo, el inconveniente de una mayor dificultad de planteamiento teórico y programación al tenerse que obtener la solución de la ecuación diferencial de la lámina para cada tipo de lámina que se presente; p.e. en el caso de puentes de planta circular es necesario resolver la lámina plana limitada por dos circunferencias y las láminas cónica y cilíndrica limitadas por dos planos horizontales; engendradas por los elementos horizontales, inclinados y verticales respectivamente. (Fig. 1.5).

### 1.2. Limitaciones y extensiones del método

La utilización del cálculo directo de la lámina plegada para el estudio de las estructuras de planta curva, y en particular, tableros de puentes de planta circular, reúne, junto a una muy buena exactitud de resultados, una limitada exigencia de capacidad de cálculo, así como una entrada simple con reducido número de datos. Sin embargo, presenta por

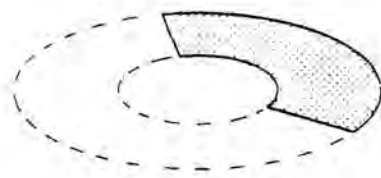


Lámina plana circular

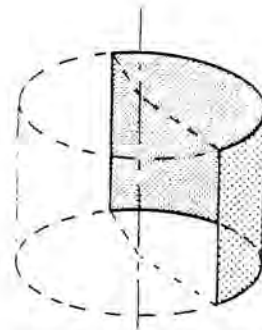


Lámina cilíndrica

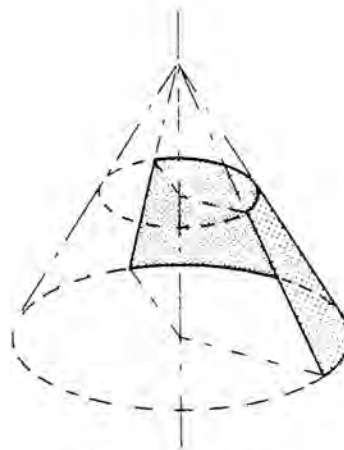


Lámina cónica

Fig. 1.5 Tipos de láminas presentes en el análisis de estructuras circulares.

otra parte las limitaciones comunes a todos los cálculos basados en el análisis armónico.

Las limitaciones más importantes son:

- El método es válido únicamente para estructuras de sección transversal constante.
- Para la obtención de una respuesta exacta frente a cargas concentradas en las proximidades del punto de aplicación de las mismas, es necesario un número de armónicos elevado.
- Las condiciones de sustentación en los extremos son de apoyo tímpano, esto es, simple apoyo a flexión y empotramiento a torsión.
- El método es inicialmente válido para estructuras de vano único, aunque fácilmente ampliable a estructuras continuas de varios vanos.

La limitación relativa a las condiciones de apoyo en los extremos, podría soslayarse realizando un desarrollo mediante funciones de Rayleigh en vez de utilizar series armónicas de Fourier. Aunque el apoyo simple es la sustentación normal en estribos, podría ser de interés para el análisis de estructuras evolutivas.

La extensión del método a estructuras continuas de varios vanos se puede realizar mediante el procedimiento desarrollado por Scordelis para el estudio de láminas plegadas rectas continuas (6), (11).



## 2. CALCULO MATRICIAL DE LAMINAS PLEGADAS PRISMATICAS

El método de cálculo matricial utilizado, corresponde al de equilibrio, que es un método genérico fácilmente aplicable a ordenador, y permite la resolución de cualquier lámina plegada con independencia de la forma de su sección transversal, admitiendo láminas de sección abierta o cerrada, con cualquier número de ellas incidiendo en cada arista.

Este método se basa en el desarrollado por De Fries-Skene y Scordelis (2) para el estudio de láminas plegadas rectas; utilizándose para el estudio longitudinal de la estructura una solución de tipo Levy, mediante desarrollo en serie de Fourier de todas las funciones que intervienen en el mismo.

Al tratarse de un método de análisis por armónicos, se realiza un estudio independiente para cada uno de éstos, obteniéndose el resultado final por suma de los resultados parciales correspondientes a cada armónico.

El estudio de cada armónico se reduce a un planteamiento en el que sólo intervienen las amplitudes máximas de cada variable, con lo que el mismo se reduce a un análisis bidimensional. Una vez obtenidas dichas amplitudes, se calculan en los puntos deseados, por medio de las funciones correspondientes, los valores de las distintas variables.

El análisis de la estructura siguiendo el esquema clásico del método de equilibrio, se divide en dos estados: (fig. 2.1).

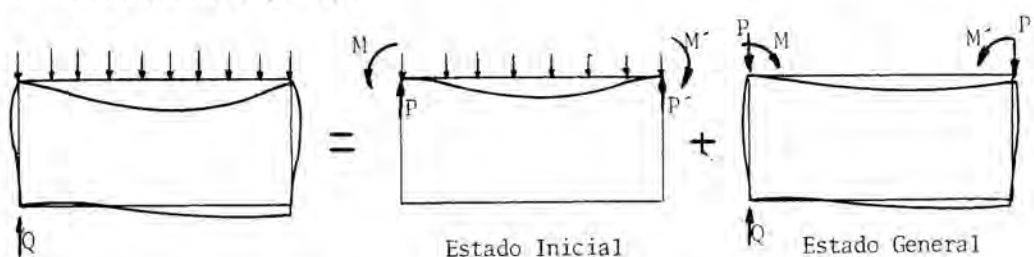


Fig. 2.1. Estados de análisis de la estructura. (Sección transversal).

- *Estado inicial.* En este estado se estudia la situación de cada lámina supuesta rígidamente empotrada en las aristas que la delimitan y sometida a la acción de las cargas que actúan en ella, obteniéndose simultáneamente las reacciones que aparecen en las aristas en esta situación.

Se trata de un estudio aislado de cada lámina, independiente de la forma de la estructura.

- *Estado general.* En este estado se estudia la respuesta de la estructura bajo la acción de las cargas aplicadas en las aristas y de las acciones en los bordes de las láminas obtenidas en el Estado inicial.

El cálculo del estado inicial consta de dos partes: (Fig. 2.2).

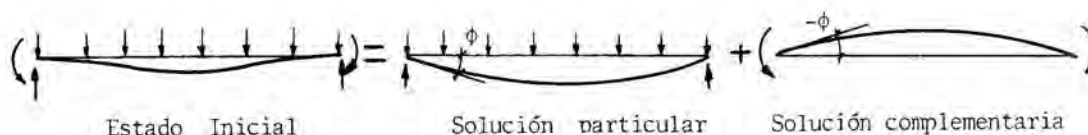


Fig. 2.2. Análisis del Estado Inicial.

- Solución particular, o estudio de los esfuerzos y deformaciones en la lámina bajo la acción de las cargas aplicadas en ella.
- Solución complementaria, o estudio de los esfuerzos que aparecen en la lámina al imponer en los bordes de la misma unos desplazamientos iguales y de signo contrario a los obtenidos en la Solución Particular, con el fin de obtener, por suma de ambos, la condición de empotramiento de la lámina en las aristas de borde.

El estado general se calcula mediante la obtención de la matriz de rigidez de cada lámina, es decir, la relación entre los movimientos en los bordes de cada lámina y las fuerzas que aparecen como consecuencia de estos.

Ensamblando las matrices de rigidez de cada lámina expresadas en coordenadas generales, se obtiene la matriz de rigidez de la estructura. El vector de cargas se forma a partir de las reacciones en los bordes de cada lámina, calculadas en el estado inicial, y de las cargas aplicadas en las aristas. Resolviendo el sistema se obtienen los desplazamientos de las aristas, a partir de los cuales se obtienen, para cada lámina, las constantes de integración correspondientes al estado general.

Sumando los resultados obtenidos en el estado inicial y en el general, se determina el valor de la amplitud de cada función correspondiente a la situación transversal deseada. La obtención del valor del esfuerzo o desplazamiento en una sección longitudinal cualquiera, para el armónico que se está calculando, se realiza mediante el desarrollo en serie correspondiente a dicha función, para el valor del ángulo en que se encuentre. El resultado final se obtiene por acumulación de los distintos armónicos.

### 3. ANALISIS DE LAS LAMINAS INDIVIDUALES

Para el estudio independiente de cada tipo de lámina se ha utilizado la Teoría de las Láminas Rebajadas, a partir del desarrollo realizado por Vlassov (12) y otros autores (3) (9).

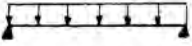



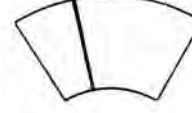




En la obtención de la solución de las ecuaciones correspondientes a cada lámina, se utiliza una solución de tipo Levy, es decir, mediante desarrollo de las distintas funciones que intervienen en el problema, en serie de Fourier en la dirección circunferencial de la misma, de la forma:

$$F(\alpha_1) = \sum_{n=0}^{n=N} F_n \left( \frac{\sin}{\cos} \right) \lambda_n \alpha_1$$

En el caso de lámina plana circular se utilizan, para la resolución de la ecuación homogénea, soluciones de tipo potencial; siendo necesario encontrar soluciones para las ecuaciones completas correspondientes a cada uno de los tipos de carga en el interior de la lámina que se quieran estudiar. Los casos de carga analizados en este trabajo corresponden a los recogidos en el cuadro adjunto y permiten estudiar los tipos más normales de carga que se presentan en puentes.

La distribución longitudinal de la carga repercute en el cálculo de los coeficientes del desarrollo en serie; mientras que la distribución transversal obliga a la obtención de la correspondiente solución de las ecuaciones diferenciales.

En el caso de lámina cilíndrica se utilizan soluciones de tipo exponencial para la ecuación homogénea; estudiándose únicamente la ecuación completa para carga vertical uniforme, correspondiente al peso propio.

		Distribución Longitudinal		
				
		Uniforme	Concentrada	Uniforme limitada
Distribución Transversal	Uniforme			
	Concentrada			
		Uniforme total	Cuchillo transversal	Faja transversal
		Cuchillo longitudinal	Puntual	Cuchillo longitud. limitado

Tipos de carga analizados en la lámina plana circular.

Las ecuaciones de estado de las láminas, particularizadas para el caso de lámina cónica, no tienen solución exacta que esté formada por un conjunto finito de funciones trascendentes elementales; por lo que es necesario recurrir a una solución aproximada.

Frente a la utilización de soluciones aproximadas formadas por una combinación lineal de polinomios ortogonales, que minimice determinadas funciones de error en el dominio de la lámina, se ha preferido una solución mediante funciones de desplazamiento del tipo de banda finita.

Al objeto de conseguir un elemento de banda finita lo más homogéneo posible con las soluciones exactas utilizadas para los demás tipos de lámina, se han utilizado funciones de desplazamiento de grado elevado. Con este fin, el elemento diseñado tiene tres líneas nodales, dos en las aristas extremas y una en el centro. En la formación de la matriz de rigidez y vector de cargas en aristas, se eliminan, mediante condensación estática, los movimientos y fuerzas correspondientes a la línea nodal central, con lo que las matrices quedan únicamente en función de los movimientos y fuerzas en las aristas extremas.

Las funciones de desplazamiento resultantes son polinomios de segundo grado para los movimientos en el plano tangente y de quinto grado para los movimientos normales al mismo.

### 3.1. Características del elemento de banda finita desarrollado para la lámina cónica

Por haberse utilizado funciones de forma de grado elevado, mediante la introducción de un punto nodal intermedio, el comportamiento del elemento es bastante análogo al de la lámina cónica, por lo que, como ha quedado puesto de manifiesto en los casos analizados, no es necesario introducir más de un elemento en el análisis de cada lámina.



La respuesta obtenida puede considerarse exacta en lo que respecta a los esfuerzos y desplazamientos de flexión; sin embargo, los esfuerzos en el plano de la lámina, y particularmente el esfuerzo tangencial  $T_{12}$ , presentan una respuesta menos ajustada. Para estos esfuerzos se obtienen distribuciones casi lineales en la dirección transversal de la lámina, de forma que la integral del esfuerzo se corresponde con el valor real.

En el caso de los esfuerzos axiales, su distribución en la dirección transversal de la lámina es, al no existir cargas puntuales aplicadas en el interior de la misma, prácticamente lineal, por lo que no aparecen en el cálculo errores significativos. El esfuerzo tangencial, sin embargo, presenta en la realidad una distribución parabólica, por lo que los resultados deducidos no se ajustan a la misma.

La obtención de los valores reales del esfuerzo tangencial, puede realizarse de dos formas: mediante la división de la lámina en varios elementos, o mediante el cálculo de dicha distribución a partir de los datos suministrados por el programa, esto es, los valores del mismo en las aristas de borde y su integral en el ancho de la lámina.

#### 4. COMPARACION ENTRE LA LAMINA PLEGADA, BANDAS FINITAS Y ELEMENTOS FINITOS

Con el fin de estudiar la concordancia entre los tres métodos de cálculo que mejor se adaptan al análisis de puentes curvos de sección transversal distorsionable, esto es, lámina plegada, bandas finitas y elementos finitos, se ha realizado el estudio de un tablero de puente por los tres métodos.

El puente estudiado es un puente cajón de sección bicelular, de 30,48 m (100 pies) de luz, con un radio de 76,20 m (250 pies), (véase figura 4.1), sometido a la sobrecarga del camión estándar de la AASTHO situado en el centro de la luz, en dos posiciones transversales. El análisis mediante bandas finitas y elementos finitos ha sido tomado de Meyer (8) que ha utilizado dos programas especialmente diseñados para el análisis de puentes de planta circular, FINPLA 2 para elementos finitos y CURSTR para bandas finitas.

En el análisis mediante elementos finitos se ha utilizado una malla formada por 247 elementos; en el análisis mediante bandas finitas se han utilizado 15 elementos, y en el de lámina plegada únicamente 9 láminas. En estos dos últimos casos el número de armónicos ha sido de 50.

Los esfuerzos estudiados son: El esfuerzo normal longitudinal  $N_1$  y el momento transversal  $M_2$  en la sección de centro de la luz. Los resultados obtenidos por los tres métodos para el camión B se encuentran recogidos en la figura 4.2.

En la comparación de los resultados obtenidos, en cuanto a tensiones longitudinales, se pueden distinguir dos casos, las losas superior e inferior y las almas. En las losas la concordancia es bastante buena siendo las mayores diferencias del 7 por 100 y dando la lámina plegada generalmente valores intermedios a los obtenidos por los otros dos métodos. En las almas la concordancia es peor, llegándose a discrepancias del 27 por 100. Sin embargo, los valores obtenidos con el método de la lámina plegada en las losas y las almas son coherentes unos con otros, no siéndolo los valores obtenidos en los otros dos métodos. Estas discrepancias aparecidas en el análisis mediante el método de las bandas finitas y de los elementos finitos se explican, según Meyer, por el hecho de haber utilizado una malla poco tupida.

En cuanto a momentos flectores, las discrepancias en los valores obtenidos en la losa superior son inferiores al 8 por 100. En las almas las discrepancias vuelven a ser mayores, llegando a alcanzar el 46 por 100. Un análisis de los resultados obtenidos demuestra que en

el método de la lámina plegada existe equilibrio de momentos en las aristas en que confluyen las almas con la losa, equilibrio que no tiene lugar en los otros dos métodos, por lo que la fiabilidad del método de la lámina plegada es mayor. Aunque los errores relativos llegan a ser importantes, éstos tienen lugar en zonas en los que el valor del momento flector es bajo, por lo que los errores absolutos son pequeños no superando el 9 por 100 del momento máximo en la sección.

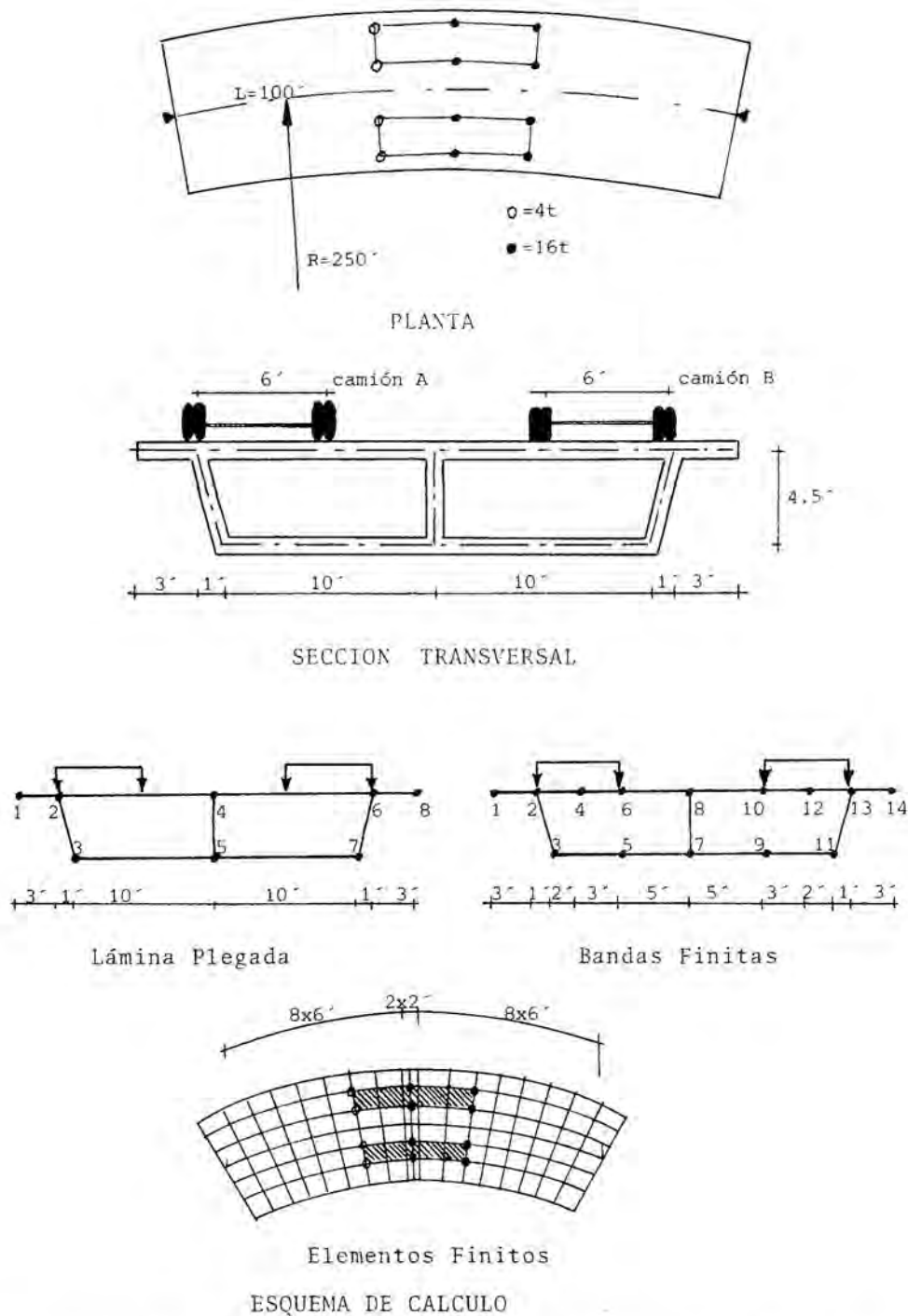


Fig. 4.1. Comparación entre Lámina Plegada, Bandas Finitas y Elementos Finitos. Estructura e hipótesis de carga.

En conclusión, se puede decir que la concordancia entre los tres métodos es aceptable desde el punto de vista práctico, siendo más fiables los resultados deducidos por el método de la lámina plegada; destacándose el hecho de que, en este método, el número de elementos en que se discretiza la estructura es el menor de los tres.

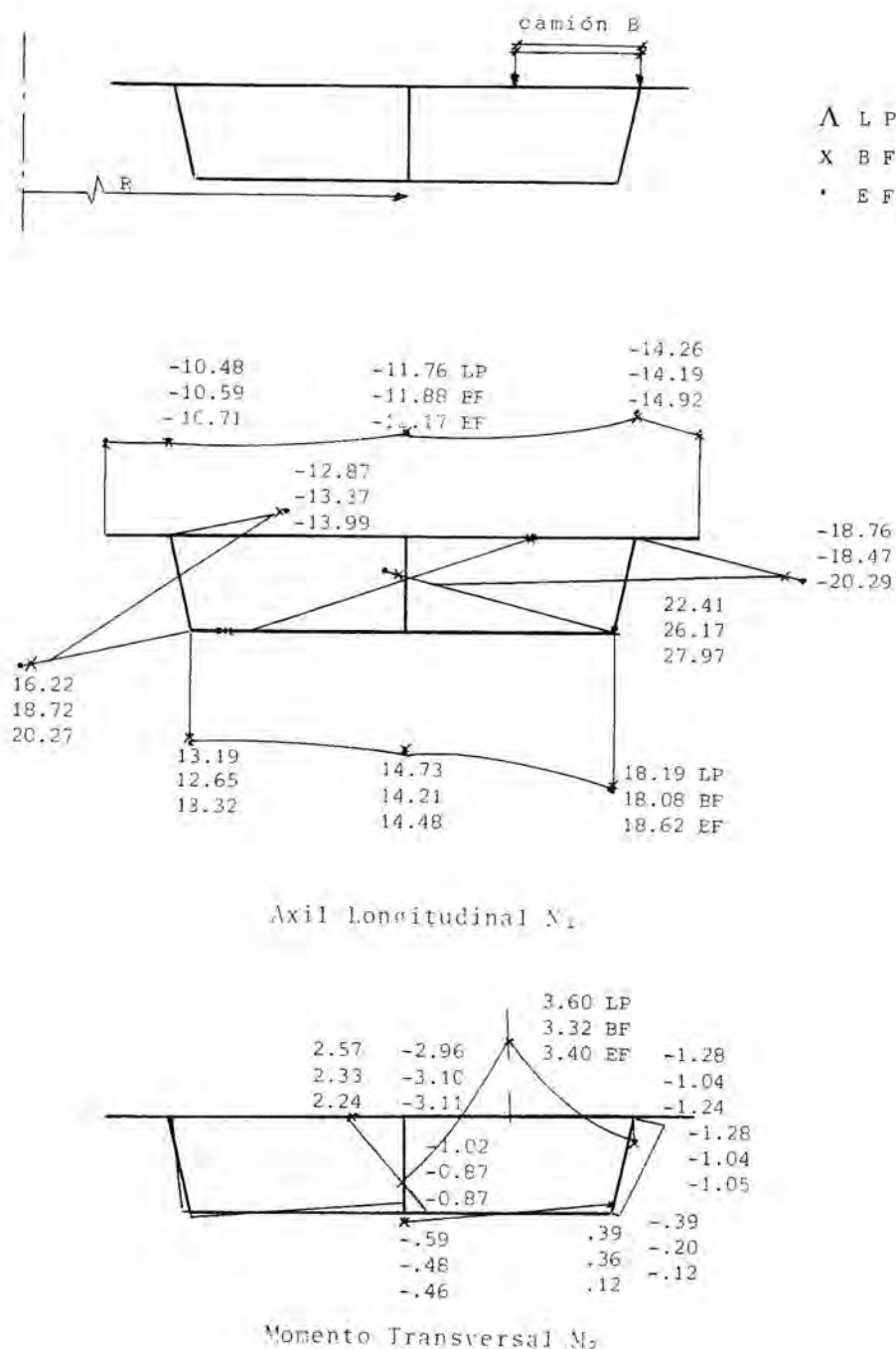


Fig. 4.2. Esfuerzos en la sección centro luz. Camión B. Comparación Lámina Plegada, Bandas Finitas, Elementos Finitos.

## 5. ANALISIS DE UN PUENTE DE DOS VANOS

Como ejemplo de aplicación se presenta el análisis de un puente curvo, de dos vanos de 50 metros de luz y 200 metros de radio; el apoyo en estribos se realiza mediante una riostra infinitamente rígida; el apoyo en la pila intermedia se materializa mediante dos apoyos situados bajo cada una de las almas. La sección transversal del tablero es la representada en la figura 5.1. El caso de carga estudiado corresponde a una carga uniformemente repartida en toda la superficie del tablero.

Al no estar preparado el programa desarrollado, para el cálculo de puentes con apoyos intermedios, el apoyo en la pila se ha materializado en el cálculo introduciendo bajo cada una de las almas una fuerza vertical que anule el desplazamiento debido a las cargas exteriores.

El puente carece de riostra sobre pila, lo que acentúa las concentraciones de esfuerzos que aparecen sobre los apoyos de la misma, por lo que los resultados presentados en este apartado deben de interpretarse teniendo en cuenta esta característica del puente estudiado.

En la figura 5.2 se han resumido algunos de los resultados obtenidos en el cálculo, presentándose para la sección de vano ( $0,4 L$ ) las flechas  $w$ , tensiones longitudinales  $\sigma_1$  y axiles transversales  $N_2$ ; para la sección de estribo se estudian las tensiones tangenciales  $\tau_{12}$  y para la sección de pila las tensiones longitudinales  $\sigma_1$  axiles transversales  $N_2$  y tensiones tangenciales  $\tau_{12}$  en las cercanías de la misma.

El análisis de las tensiones longitudinales permite comprobar la concentración de tensiones que aparece sobre los apoyos como consecuencia de la deformación originada por las tensiones tangenciales en las losas superior e inferior (shear lag).

En el estudio de las tensiones tangenciales, los valores obtenidos en el estribo son prácticamente coincidentes con los obtenidos en un cálculo como viga. Sin embargo, en las proximidades de la pila el efecto de las reacciones de los apoyos produce una concentración de esfuerzos en las esquinas inferiores del cajón, obteniéndose una distribución de tensiones tangenciales que difiere apreciablemente de la obtenida mediante el cálculo analítico.

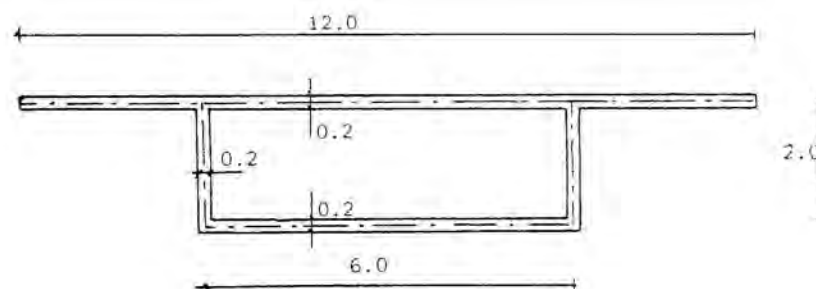
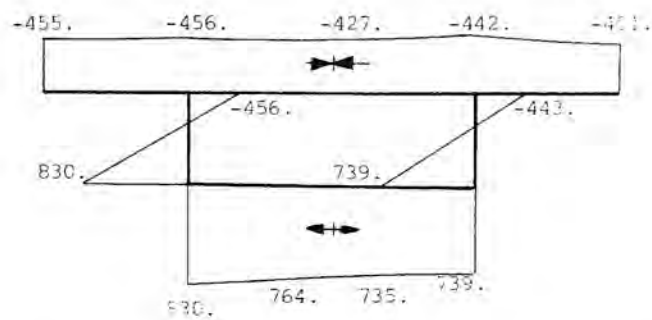


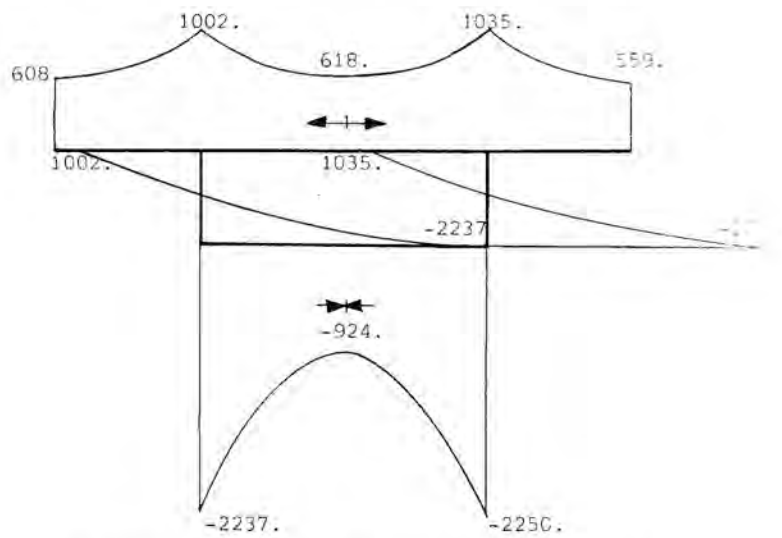
Fig. 5.1. Sección transversal.

En la sección a un canto del apoyo, se reducen los efectos originados por la reacción de la pila, siendo la distribución de tensiones tangenciales más parecida a la obtenida mediante un cálculo como viga.

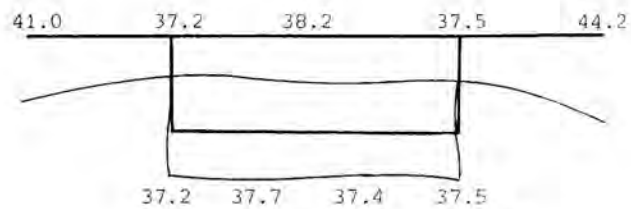
Presenta también interés el análisis de los esfuerzos axiles transversales, originados por la variación de tensiones tangenciales en la dirección longitudinal del puente, destacándose la difícil evaluación de este esfuerzo por métodos aproximados. En el ejemplo analizado se puede observar la importancia que este fenómeno puede tener, habiéndose obtenido sobre la pila tracciones de  $20 \text{ t/m}^2$  y compresiones de  $250 \text{ t/m}^2$ .



Tensiones Longitudinales  $\sigma_1$  en vano ( $x=20m$ )



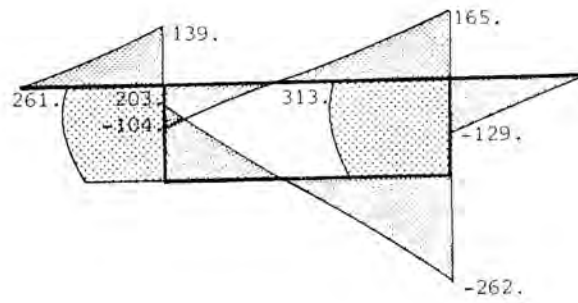
Tensiones Longitudinales  $\sigma_1$  en pila ( $x=50m$ )



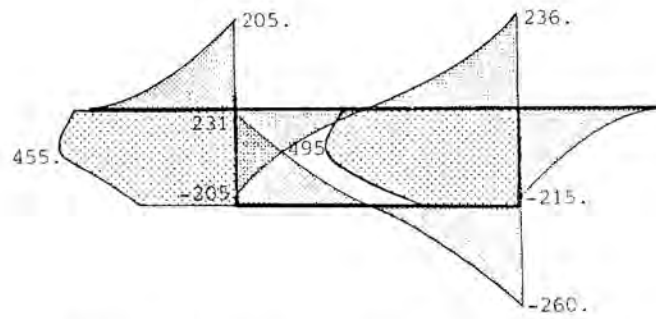
Flechas  $w$  en vano ( $x=20m$ )

Fig. 5.2. (1) Puente de dos vanos, Tensiones Longitudinales y flechas.

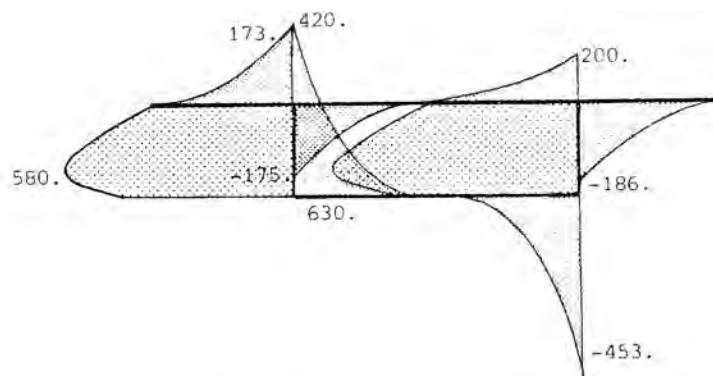




Tensión Tangencial  $\tau_{12}$  en estribo (x=0)

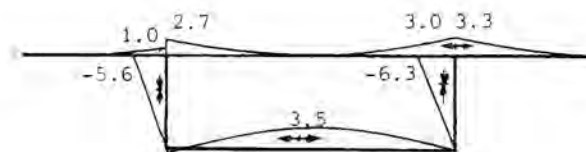


Tensión Tangencial  $\tau_{12}$  2m nila (x=48m)

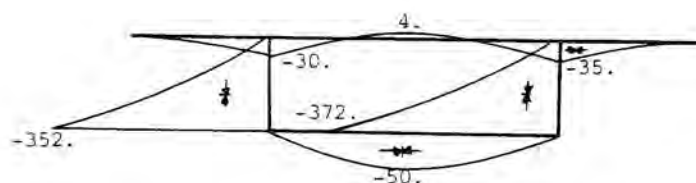


Tensión Tangencial  $\tau_{12}$  1m nila (x=49m)

Fig. 5.2, (2) Puente de dos vanos. Tensiones Tangenciales.



Axil transversal  $N_2$  en vano ( $x=20m$ )



Axil transversal  $N_2$  en pila ( $x=50m$ )

Fig. 5.2. (3) Puente de dos vanos. Axiles Transversales.

## 6. ESTUDIO PARAMETRICO DE UN PUENTE DE SECCION CAJON

El análisis de puentes curvos presenta mayores dificultades que el de los puentes rectos, no siendo fácil la determinación directa de los esfuerzos que aparecen en el tablero por efectos de la curvatura. Sin embargo, el conocimiento previo del orden de magnitud de dichos efectos tiene interés, tanto para la realización del predimensionamiento del puente, como en la determinación de la posibilidad de realizar un análisis simplificado del mismo, despreciando algunos de los efectos de la curvatura.

Con el fin de realizar una cuantificación del efecto de la curvatura sobre las funciones que se ven más afectadas por la misma, se ha realizado un estudio de tres series de tableros de 20, 40 y 100 m de longitud. Cada serie analizada consta de cuatro tableros, con radios de 100, 200, 1.000 y 10.000 metros, asimilándose este último caso al de puente recto.

La sección del tablero analizada, representada en la figura 5.1, es la misma que se ha utilizado en el ejemplo anterior.

Los casos de carga estudiados en cada uno de los tableros han sido tres:

- Sobrecarga uniforme de  $1 \text{ t/m}^2$  extendida en toda la superficie del tablero.
- Carga puntual de 100 t situada en el centro de la luz, sobre el alma exterior.
- Carga puntual de 100 t situada en el centro de la luz, sobre el alma interior.

A continuación se presentan gráficamente algunos de los resultados obtenidos. Estos se presentan en forma adimensional, para facilitar su aplicación práctica a diversas secciones transversales. Al ser la finalidad del estudio el obtener los valores de los esfuerzos a partir de los que aparecen en el tablero recto, se ha representado gráficamente la relación entre el esfuerzo que aparece en el tablero curvo y el que aparece en el tablero recto  $K = F(R_i)/F(R_\infty)$ .

Las funciones estudiadas han sido:

- Flecha en las almas, en el centro de la luz, representada en la figura 6.1.
- Tensión longitudinal en la losa superior, en el centro de la luz, figura 6.2.
- Tensión longitudinal en la losa inferior en el centro de la luz, figura 6.3.
- Tensión tangencial en las almas al nivel del centro de gravedad de la sección en apoyos, figura 6.4.

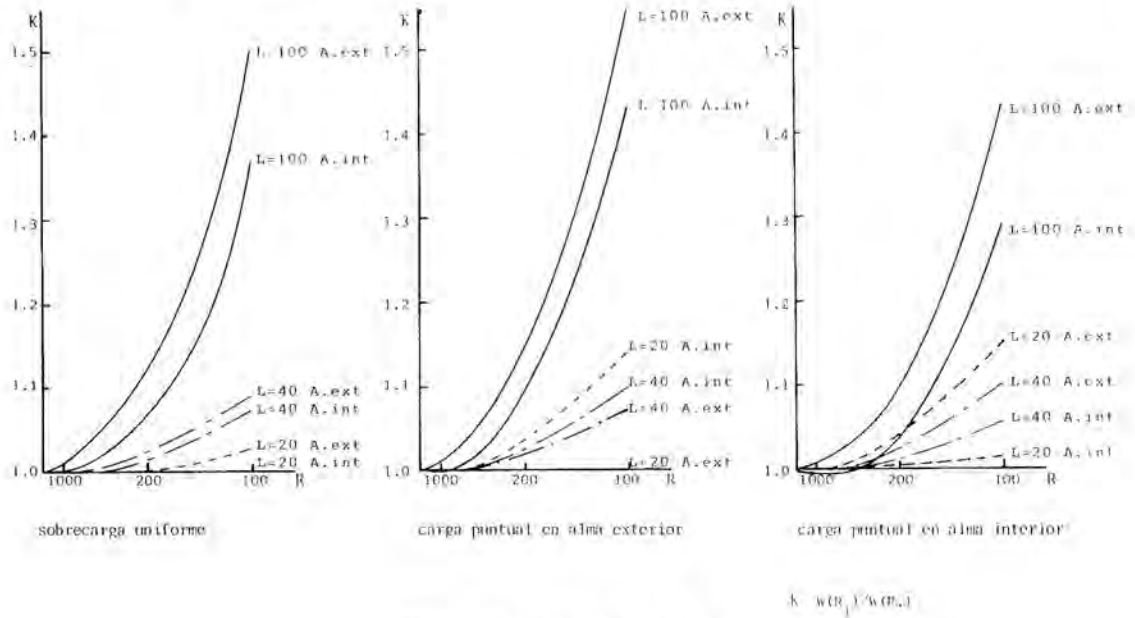


Fig. 6.1. Flecha en las almas,  $w$ .

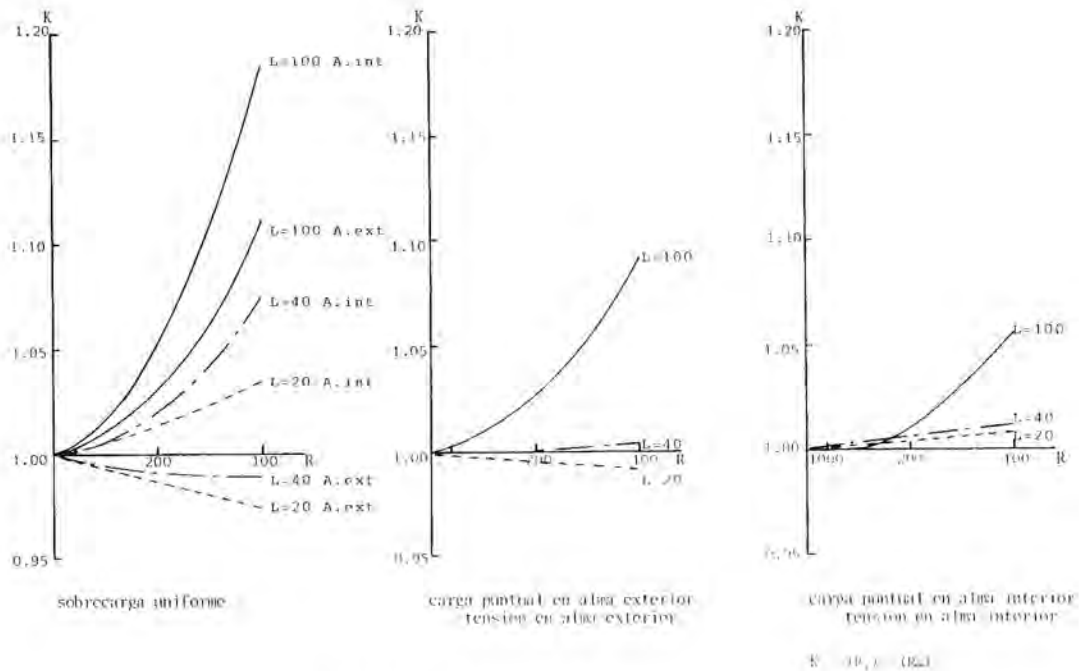


Fig. 6.2. Tensión longitudinal en losa superior,  $\sigma_{11}$ .

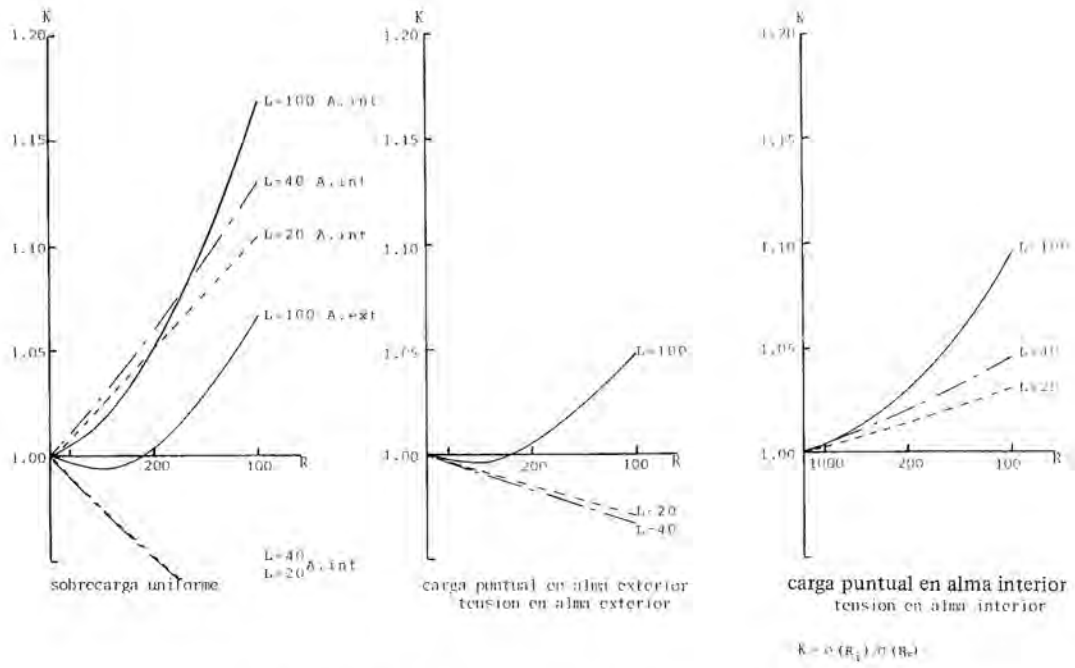


Fig. 6.3. Tensión longitudinal en losa inferior,  $\sigma_{11}$ .

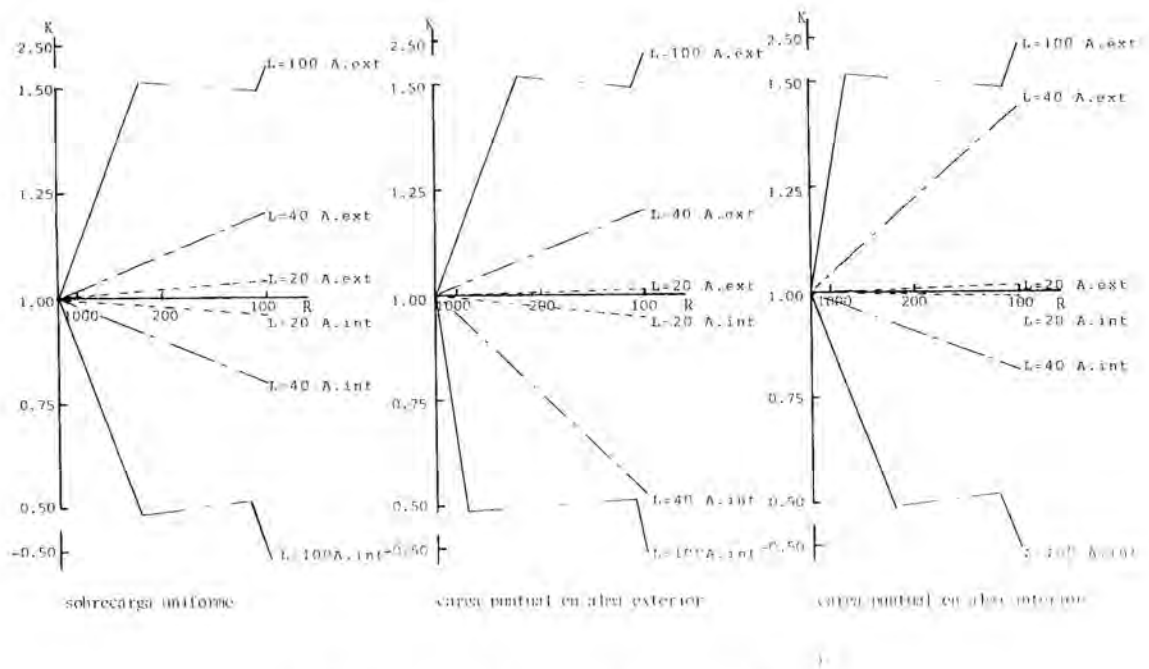


Fig. 6.4. Tensión tangencial en las almas,  $\tau_{12}$ .

## Apéndice 1: ANALISIS DE ESTRUCTURAS CONTINUAS

Como se ha indicado anteriormente, el método de cálculo directo de la Lámina Plegada no permite de forma inmediata el análisis de estructuras continuas. Sin embargo, es posible desarrollar un sistema mixto de cálculo con este fin.

El estudio de estructuras continuas puede efectuarse mediante una combinación del método de equilibrio utilizado para la estructura laminar y las estructuras de apoyo, y el de compatibilidad mediante el cual se obtienen las fuerzas de interacción entre lámina y apoyos que se tratan con incógnitas hiperestáticas.

El análisis se desarrolla según el siguiente esquema:

1. Se independiza la lámina plegada de las estructuras de apoyo (pilas con sus correspondientes diafragmas, etc), definiéndose los puntos de conexión en los que se exige compatibilidad de desplazamientos.
2. Se analiza la lámina sustentada en los apoyos extremos sometida a las cargas exteriores.
3. Se analiza la lámina bajo la actuación de fuerzas unitarias en los puntos de conexión con las estructuras de apoyo.
4. Se analizan, mediante programas generales de cálculo de estructuras reticuladas y/o elementos finitos, las estructuras de apoyo sometidas a fuerzas unitarias, iguales y contrarias a las aplicadas a la lámina en el apartado 3.
5. Planteamiento de las condiciones de compatibilidad de movimientos en los puntos de conexión a partir de los valores obtenidos en los apartados 2, 3 y 4 y resolución del sistema de ecuaciones resultante con la obtención de las fuerzas de interacción entre lámina y apoyos.
6. Obtención de los esfuerzos en la lámina y en las estructuras de apoyo sometidas a las acciones exteriores y a las fuerzas de conexión, mediante combinación lineal de los valores obtenidos en los apartados 2, 3 y 4 con los coeficientes resultantes en el apartado 5.

Los cálculos pueden realizarse directamente, mediante un programa que efectúe los pasos 5 y 6 a partir de los resultados, transmitidos mediante archivos de datos, generados en los pasos 2, 3 y 4 por el programa de Lámina Plegada y el de cálculo de estructuras reticuladas.

## Apéndice 2: ESTUDIO DE LOS ESFUERZOS ORIGINADOS POR EL PRETENSADO

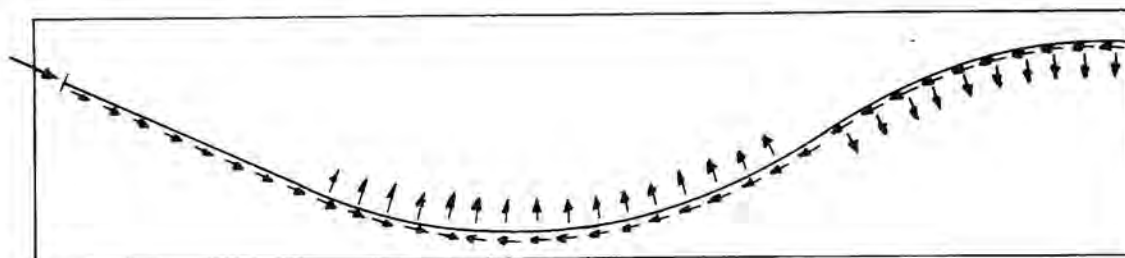
El pretensado representa uno de los principales estados de carga a que se encuentran sometidos los puentes objeto de análisis con el método de la Lámina Plegada. Su actuación es en muchos aspectos contraria a la del resto de las cargas exteriores, por lo que algunos de los efectos originados por éstas quedan contrarrestados por el mismo.

El estudio del pretensado plantea varios problemas, originados por la naturaleza de su forma de actuar. Las acciones que origina se pueden reducir a unas fuerzas concentradas en anclajes y unas fuerzas distribuidas a lo largo del tendón; estas últimas tienen una componente tangente al tendón debida al rozamiento y otra normal al mismo debida a la curvatura del trazado (fuerzas de desviación), actuando en una posición variable, tanto transversal co-

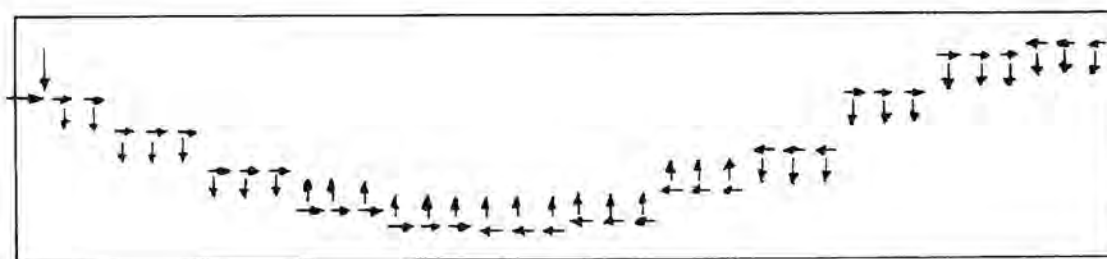


mo circunferencialmente [Fig. A2.1 (A)] por lo que su análisis no es abordable directamente.

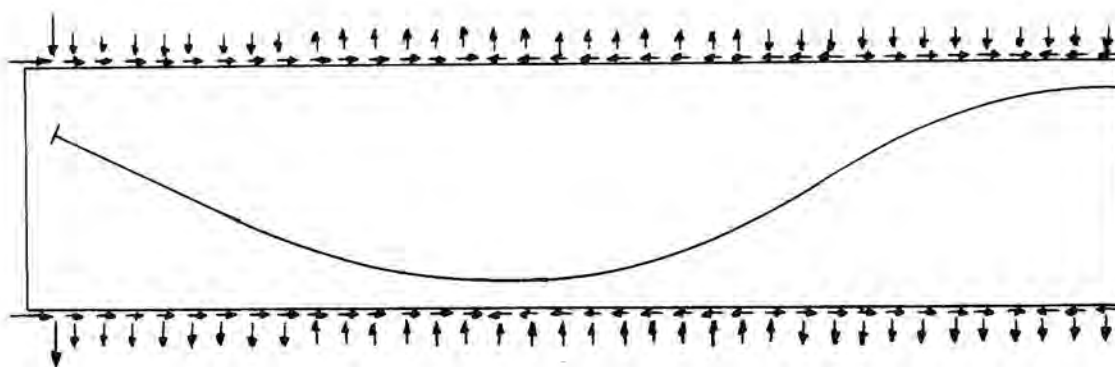
Un tratamiento del problema, puede ser la discretización del tendón en una serie de tramos. En cada tramo, y al nivel del centro de gravedad del tendón en el mismo, se sustituyen las cargas actuantes por dos cargas uniformes (horizontal y vertical) equivalentes [fig. A 2.1 (B)].



A) Acciones originadas por el pretensado.



B) Discretización mediante cargas en lámina.



C) Discretización mediante cargas en aristas.

Fig. A 2.1. Análisis de las acciones de pretensado.

Esta aproximación plantea dos problemas. El primero, es la necesidad de obtener la solución de las ecuaciones de las láminas con carga en un punto intermedio de la misma. Este problema que puede ser resuelto en el caso de lámina plana o cilíndrica, no tiene solución en el caso de lámina cónica, mediante la técnica de Bandas Finitas. El segundo problema radica en el hecho de aparecer gran número de cargas, ya que por cada tendón se introducen dos cargas por cada uno de los tramos en que se divide la estructura.

Un segundo método, consiste en sustituir las fuerzas repartidas calculadas según el método anterior, por parejas de fuerzas estáticamente equivalentes aplicadas en las aristas de la lámina [fig. A 2.1 (C)]. Este método evita el tener que resolver las ecuaciones de las láminas para las cargas aplicadas en el interior de la misma y reduce a cuatro el número de cargas que hay que aplicar en cada tramo, con independencia del número de tendones. Sin embargo, por este método no es posible analizar los esfuerzos locales, especialmente la introducción de las fuerzas concentradas en anclajes.

## CONCLUSIONES

A la vista del trabajo realizado, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

- La resolución de las ecuaciones de las láminas rebajadas correspondientes a diversos casos particulares de láminas, permite la ampliación del método de las Láminas Plegadas al análisis de estructuras no rectas, como son, las estructuras de planta circular.
- La utilización de elementos de lámina “exactos”, es decir obtenidos por resolución analítica de las ecuaciones de las láminas rebajadas, permiten el análisis de estructuras con un número mínimo de elementos. El número de elementos se reduce a los necesarios para representar la geometría de la estructura analizada, con independencia de las dimensiones de los elementos resultantes y de la posición de las cargas.

En los casos en los que sea necesario introducir elementos de lámina cónica, se obtienen resultados correctos con la utilización de un único elemento de banda finita por cada lámina que hay que representar.

- Los elementos obtenidos por resolución directa de las ecuaciones de la lámina rebajada, permiten obtener exactamente, en cualquier punto de la lámina, todos los esfuerzos y desplazamientos que aparecen en la misma.

El elemento obtenido, en el caso de la lámina cónica, por el método de las bandas finitas, debido a haberse utilizado polinomios de quinto grado para los desplazamientos normales al plano tangente a la lámina, representan con suficiente exactitud los esfuerzos de flexión. Por haberse usado para los movimientos en el plano tangente polinomios de segundo grado, no es posible deducir exactamente la variación del esfuerzo tangencial  $T_{12}$  en el interior del elemento.

La obtención de la distribución exacta del esfuerzo tangencial en la dirección transversal de la lámina, se puede realizar a partir de los valores suministrados por el programa.

- La comparación del método de la lámina plegada curva con otros métodos de cálculo de estructuras espaciales de planta circular (elementos finitos y bandas finitas), permite demostrar la eficacia del mismo, tanto por la exactitud de sus resultados como por el reducido número de elementos necesarios para analizar la estructura.
- Es posible ampliar el método de la lámina plegada a estructuras de varios vanos, o que contengan elementos que no puedan ser analizados adecuadamente mediante el análisis como lámina.
- Se aporta un estudio de la influencia de la curvatura sobre los esfuerzos y deformaciones de un tablero tipo, para distintas luces. El estudio se ha realizado con un tablero de sección cajón monocelular, de 12 m de ancho, con luces comprendidas entre 20 y 100 m; lo que permite su aplicación al predimensionamiento de puentes de dimensiones normales.

## BIBLIOGRAFIA

1. Cheung Y.: "Folded plate structures by Finite Strip method". ASCE Structural Division, Dic. 1969.
2. De Fries-Skene A. y Scordelis A.C.: "Direct Stiffness solution for folded plates". ASCE Structural Division, Agosto 1964.
3. Goldenveizer A.L.: "Theory of Elastic Thin Shells". Pergamon Press, 1961.
4. González Esteban J.I. "Análisis de puentes de planta circular por el método de la lámina plegada". Tesis doctoral presentada en la ETSICCP de Santander, 1985.
5. Kabir A.F. y Scordelis A.C.: "Computer program for curved bridges on flexible bents". Report UCB-SESM 74-10. Universidad de California, en Berkeley, 1974.
6. Lin C.S. y Scordelis A.C.: "Computer program for bridges on flexible bents". Report UCB-SESM 71-24 Universidad de California, en Berkeley, Diciembre 1971.
7. Manterola, J.: "Estudio sobre tableros de puentes, Parte II - La sección cajón". Hormigón y Acero, nº 139, 2º trimestre 1981.
8. Meyer C.: "Analysis and design of curved box girder bridges". Report UCB-SESM 70-22. Universidad de California, en Berkeley, 1970.
9. Novozhilov V.V. "Thin Shell Theory". Noordhoff, 1970.
10. Samartín A.: "Aplicación de los métodos matriciales al cálculo de puentes". Pub. Lab. Central de Ensayos, nº 192, 1967.
11. Scordelis A.C.: "Analysis of Continuous Box Girder Bridges". Report UCB-SESM 67-25. Universidad de California, en Berkeley, Nov. 1967.
12. Vlasov V.Z.: "General theory of Shells and its Applications in Engineering". N.A.S.A., 1964.

## RÉSUMÉ

### ANALYSE DES PONTS CIRCULAIRES EN PLAN, POUR LA METHODE DE LA LAME PLIÉE

Le comportement des ponts circulaires en plan et de section transversal très allongée, pose un problème complexe en ce qui concerne à la répartition des efforts (interaction, flexion-torsion, distorsion, répartition des efforts parmi les différentes âmes, etc.). Pour pouvoir réaliser une correcte étude de ce problème, il est nécessaire disposer d'une méthode de calcul capable d'analyser globalement le comportement de la structure. La méthode de la lame pliée est un outil de travail effectif et de facile utilisation, valable pour les structures de section transversal constante.

Dans cet article on présente une extension de la méthode de la lame pliée à ce type structurale, ainsi qu'une étude paramétrique du comportement d'un pont de section en caisson monucellulaire.

## SUMMARY

### ANALYSIS OF CIRCULAR IN PLAN BRIDGES BY THE FOLDED PLATE METHOD

The behavior of circular in plan box section bridges, presents a complex problem of stress distribution (bending-torsion interaction, distortion, stress distribution among the different webs, etc.). In order to make a correct study, it is necessary to have an analysis method that would be able to make a global approach to the structure behavior. The Folded Plate method is an effective and of easy utilization procedure, valid for constant section structures.

In this article an extension of the Folded Plate Method to this structural form is presented; also is included a parametric study of the behavior of a single cell box circular bridge.